Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' Λυκείου:

"Κωνικές τομές - Κύκλος"

Άσκηση

Δίνονται οι κύκλοι: $\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} - 6\,\boldsymbol{x} + 8 = 0$ και $\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} + 8\,\mathbf{y} = 0$

Α. Να βρείτε τον κύκλο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

Β. Να βρείτε τη διάκεντρο των κύκλων (απόσταση των κέντρων).

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των ακτίνων των κύκλων. Τι συμπεραίνεται για τη σχετική θέση των δύο κύκλων;

Δ. Να βρεθεί μία από τις κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων.

<u>Απάντηση</u>:

Α. Με κατάλληλη συμπλήρωση της ταυτότητας του τετραγώνου αθροίσματος ή διαφοράς, οι παραπάνω εξισώσεις μετασχηματίζονται, αντίστοιχα, σε:

$(x-3)^2 + y^2 = 1^2$ και $x^2 + (y+4)^2 = 4^2$

Άρα, βάσει της θεωρίας στις "κωνικές τομές", ο πρώτος κύκλος έχει κέντρο Α (3, 0) και ακτίνα r = 1, ενώ ο δεύτερος κύκλος έχει κέντρο

Β (0, - 4) και ακτίνα R = 4.

Β. Από τον τύπο για την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων Α (3, 0) και

Β (0, - 4), θα βρούμε τη διάκεντρο (ΑΒ):

(ΚΛ) = $\sqrt{(0-3)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Γ. Από το προηγούμενο ερώτημα παρατηρούμε ότι: r + R = 1+ 4 = 5, δηλαδή: (AB) = 5 = r + R. Επομένως, διαπιστώσαμε ότι (AB) = r + R και σύμφωνα με όσα έχουμε διδαχτεί για τη σχετική θέση δυο κύκλων, προκύπτει ότι οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται έξω από τον άλλον).

Συγκεκριμένα, εφαρμόσαμε τον εξής κανόνα για τη σχετική θέση των δυο κύκλων: “ Όταν η διάκεντρος δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά”.

Δ. Γνωρίζουμε ότι για να οριστεί μια ευθεία ή ο συντελεστής διεύθυνσής της, απαιτούνται δυο οποιαδήποτε σημεία της. Έτσι, αρχικά, θα βρούμε το συντελεστή της διακέντρου (a), αφού γνωρίζουμε τα δυο σημεία της, A (3, 0) και B (0, - 4):

$$\lambda_{AB} = \frac{-4-0}{0-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Στη συνέχεια, επειδή η εφαπτόμενη, την οποία ονομάζουμε b, είναι κάθετη στη διάκεντρο, από τη σχέση για τις κάθετες ευθείες, έχουμε:

$\lambda_{AB}\ \lambda_b$ = - 1, συνεπώς: $\lambda_b = -\ \frac{3}{4}$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας από το γενικό τύπο της ευθείας, θα έχει τη γενική μορφή: $y = \lambda_b\ x$ + c, ενώ με βάση τον παραπάνω συντελεστή διεύθυνσης, θα είναι: $y = -\ \frac{3}{4}\ x$ + c

Επίσης, από τη μελέτη της εφαπτόμενης ενός κύκλου προκύπτει ότι η ευθεία αυτή είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου και συνεπώς, απέχει από το κέντρο του, απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε, οι εξισώσεις που αναζητάμε θα προέρθουν από τη συγκεκριμένη παραδοχή. Άρα, αν ονομάσουμε b, την ευθεία που αναζητάμε και r, R τα κέντρα A (3, 0) και B (0, - 4) των δυο κύκλων, τότε:

d (A, b) = r και d (B, b) = R,

ενώ είδαμε ότι η γενική εξίσωση της ευθείας που μας ζητείται είναι:

b: $y = -\frac{3}{4}x + c$ ή $3x + 4y - c = 0$

Οι παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιώντας, επιπλέον, τον τύπο για την απόσταση σημείου από ευθεία από τη γνωστή θεωρία για τις ευθείες και αντικαθιστώντας τα σημεία των κέντρων των δυο κύκλων και τις ακτίνες τους, μετασχηματίζονται σε:

$\frac{|3\bullet 3 + 4\bullet 0 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$ και $\frac{|3\bullet 0 + 4\bullet(-4) - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$

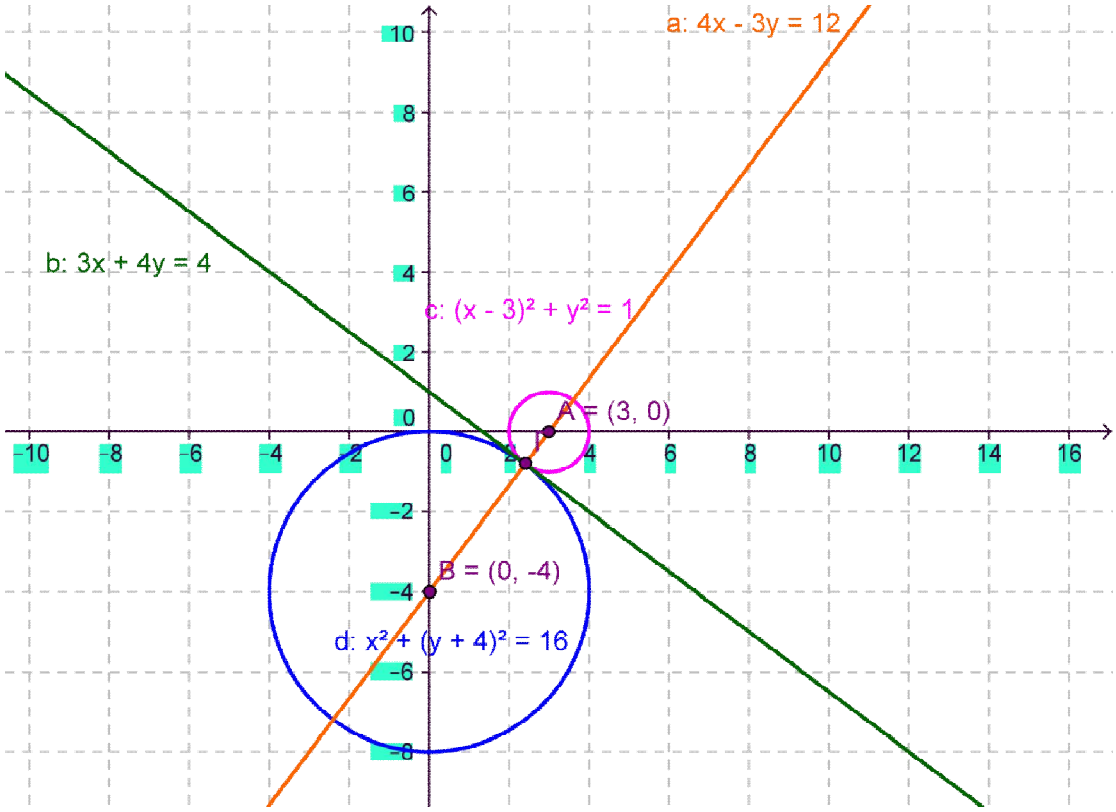
Εκτελώντας τις πράξεις, παραπάνω, θα έχουμε:

$|9 - C| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ή $|-16 - C| = 20$

Επομένως, από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών, προκύπτει:

9 – C = 5 ή 9 - C = - 5 και 16 + C = 20 ή 16 + C= - 20, ενώ από τη συναλήθευση των εξισώσεων, έχουμε: C = 4

Για C = 4, η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των δυο κύκλων είναι:

$b: y = -\frac{3}{4}x + 4$ ή b: $3x + 4y = 4$

<u>Σημείωση</u>: Μπορούμε να δούμε, εποπτικά, τα παραπάνω, με τη γραφική επίλυση της άσκησης μέσω του λογισμικού GeoGebra, εισάγοντας, αρχικά, στο πεδίο εισαγωγής του λογισμικού, καθεμία από τις εξισώσεις των δύο κύκλων.